

**ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ
КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ
ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ТЕ-ВОЛН,
РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ В СЛОЕ
С ПРОИЗВОЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ**

Аннотация. Рассматривается задача о распространении электромагнитных ТЕ-волн в слое с произвольной нелинейностью. Физическая задача сводится к решению нелинейной краевой задачи на собственные значения для системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений. В работе предложен численный метод решения рассматриваемой нелинейной краевой задачи. Приведены численные результаты на примере керровской нелинейности и нелинейности с насыщением.

Ключевые слова: нелинейная краевая задача на собственные значения, обыкновенное дифференциальное уравнение, задача Коши.

Abstract. The article considers a problem of electromagnetic TE-waves propagation in a layer with arbitrary nonlinearity. The physical problem is reduced to the nonlinear boundary eigenvalue problem for nonlinear ordinary differential equations. The author suggests a numerical method to find propagation constants and demonstrates numerical results for Kerr nonlinearity and nonlinearity with saturation.

Key words: nonlinear boundary eigenvalue problem, ordinary differential equation, Cauchy problem.

Введение

В данной работе рассматриваются электромагнитные ТЕ-волны, распространяющиеся через диэлектрический слой с нелинейной зависимостью диэлектрической проницаемости от интенсивности электрического поля. Слой расположен между двумя полупространствами с постоянными диэлектрическими проницаемостями. Разыскиваются поверхностные электромагнитные волны, распространяющиеся вдоль границ слоя. Для нахождения таких волн краевая задача для системы уравнений Максвелла формулируется в строгой электродинамической постановке. Физическая задача приводит к нелинейной краевой задаче на собственные значения для обыкновенного дифференциального уравнения (нелинейного) второго порядка. В данной работе предлагается численный метод для нахождения собственных значений задачи (значений постоянных распространения, на которых существуют поверхностные волны). Предлагаемый метод основан на решении задачи Коши для упомянутого обыкновенного дифференциального уравнения. По рассматриваемой здесь задаче и близким к ней уже были получены некоторые как численные, так и аналитические результаты [1–3]. Однако заметим, что все численные результаты получены для наиболее простых нелинейностей и разработка простых, быстрых и эффективных численных методов для рассматриваемого класса задач остается актуальной проблемой.

Для решения рассматриваемой задачи [4] и близких к ней в [3, 5] был предложен и затем в [6] развит метод интегральных дисперсионных уравнений (МИДУ), который показал свою эффективность на широком классе за-

дач. Метод интегральных дисперсионных уравнений, в первую очередь, является аналитическим методом, но допускает также и численную реализацию. Однако необходимо отметить, что численная реализация МИДУ является непростой вычислительной задачей, поскольку для вычисления собственных значений требуется (в простых случаях) вычислять несобственные интегралы [7], а в общем случае требуется дополнительно решать задачу Коши на бесконечном интервале (последний случай еще не освещен в научной литературе). Все это заставляет искать более простые (с вычислительной точки зрения) методы для нахождения собственных значений.

Также стоит отметить, что проблемы распространения электромагнитных волн в нелинейных средах, в первую очередь в слоях и цилиндрических волноводах, привлекали и продолжают привлекать большое внимание исследователей [6–13].

1. Постановка задачи

Рассмотрим электромагнитные волны, распространяющиеся через однородный, изотропный, немагнитный диэлектрический слой, расположенный между двумя полупространствами $x < 0$ и $x > h$ в декартовой системе координат $Oxyz$. Полупространства заполнены изотропной немагнитной средой без источников и имеют постоянную диэлектрическую проницаемость ε_1 и ε_3 соответственно. Предполагается, что $\varepsilon_1, \varepsilon_3$ – произвольные действительные числа. Считаем, что всюду $\mu = \mu_0$ – магнитная проницаемость вакуума.

Далее считаем, что поля гармонически зависят от времени:

$$\tilde{\mathbf{E}}(x, y, z, t) = \mathbf{E}_+(x, y, z) \cos \omega t + \mathbf{E}_-(x, y, z) \sin \omega t,$$

$$\tilde{\mathbf{H}}(x, y, z, t) = \mathbf{H}_+(x, y, z) \cos \omega t + \mathbf{H}_-(x, y, z) \sin \omega t,$$

где ω – круговая частота; $\mathbf{E}_+, \mathbf{E}_-, \mathbf{H}_+, \mathbf{H}_-$ – вещественные искомые функции.

Образуем комплексные амплитуды полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ [10]:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + i\mathbf{E}_-, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_+ + i\mathbf{H}_-.$$

Множители $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$ ниже будут опущены.

Электромагнитное поле удовлетворяет системе уравнений Максвелла:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega \varepsilon \mathbf{E}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega \mu \mathbf{H}, \quad (1)$$

условию непрерывности касательных компонент электромагнитного поля на границе раздела сред $x = 0$ и $x = h$, а также условию излучения на бесконечности: электромагнитное поле экспоненциально затухает при $|x| \rightarrow \infty$ в областях $x < 0$ и $x > h$.

Диэлектрическая проницаемость внутри слоя имеет следующий вид: $\varepsilon = \varepsilon_2 + f(|\mathbf{E}|^2)$, где ε_2 – постоянная составляющая диэлектрической проницаемости в слое (действительное число); f – некоторая непрерывная (действительнозначная) функция.

Также мы будем требовать выполнения условия $\varepsilon_2 > \max(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$. Это условие естественно возникает в линейной задаче [6] (когда диэлектрическая проницаемость в слое является постоянной).

2. ТЕ-поляризованные электромагнитные волны

Рассмотрим ТЕ-поляризованные волны:

$$\mathbf{E} = (0, E_y, 0)^T, \quad \mathbf{H} = (H_x, 0, H_z)^T,$$

где $E_y = E_y(x, y, z)$, $H_z = H_z(x, y, z)$, $H_x = H_x(x, y, z)$ и $(\cdot)^T$ – операция транспонирования.

Легко показать [6], что компоненты полей не зависят от переменной y .

Волны, распространяющиеся вдоль границы z раздела сред, гармонически зависят от z . Учитывая все сказанное, получаем, что компоненты полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ имеют представление $E_y = E_y(x)e^{i\gamma z}$, $H_x = H_x(x)e^{i\gamma z}$, $H_z = H_z(x)e^{i\gamma z}$, где γ – неизвестный спектральный параметр (постоянная распространения электромагнитной волны).

Подставляя только что введенные компоненты в (1), можно показать, что система (1) сводится к следующему уравнению (подробности см. в [4, 6]):

$$Y''(x) = (\gamma^2 - \varepsilon)Y(x). \quad (2)$$

Уравнение (2) получено из (1) после нормировки в соответствии с формулами

$$\tilde{x} = kx, \quad \frac{d}{dx} = k \frac{d}{d\tilde{x}}, \quad \tilde{\gamma} = \frac{\gamma}{k}, \quad \tilde{\varepsilon}_j = \frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_0} (j=1, 2, 3),$$

где $k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$.

Используя обозначение $E_y = Y(\tilde{x})$ и опуская тильду, получаем уравнение (2).

Будем искать те значения спектрального параметра γ (собственные значения), для которых существуют действительные решения $Y(x)$ уравнения (2), γ полагаем действительным числом [6] и считаем, что

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_1, & x < 0; \\ \varepsilon_2 + f(Y^2), & 0 < x < h; \\ \varepsilon_3, & x > h. \end{cases}$$

Отметим еще, что в линейном случае должно выполняться неравенство $\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3) < \gamma^2 < \varepsilon_2$ [6]. Но в нелинейном случае это неравенство не обязательно имеет место, и мы будем считать, что $\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3) < \gamma^2 < a$, где $a < \infty$ [6].

Считаем, что функция $Y(x)$ дифференцируема так, что

$$Y(x) \in C(-\infty, +\infty) \cap C^1(-\infty, +\infty) \cap C^2(-\infty, 0] \cap C^2[0, h] \cap C^2[h, +\infty).$$

Такие условия непрерывности и дифференцируемости функции Y соответствуют физическому смыслу задачи.

3. Решение системы дифференциальных уравнений

В полупространствах $x < 0$ и $x > h$ диэлектрическая проницаемость ε в уравнениях Максвелла (1) имеет постоянное скалярное значение ε_1 и ε_3 соответственно. Для этих полупространств получаем решения

$$X(x) = Ae^{x\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1}}, \quad Z(x) = \gamma^{-1}\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1} Ae^{x\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1}}; \quad (3)$$

$$X(x) = Be^{-(x-h)\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3}}, \quad Z(x) = -\gamma^{-1}\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3} Be^{-(x-h)\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3}}, \quad (4)$$

где учтены условия на бесконечности. Легко видеть, что должны выполняться неравенства $\gamma^2 - \varepsilon_1 > 0$ и $\gamma^2 - \varepsilon_3 > 0$ [6].

Постоянные A и B в решениях (3) и (4) определяются условиями сопряжения и начальными данными.

Внутри слоя $0 < x < h$, тогда $\varepsilon = \varepsilon_2 + f(Y^2)$. Уравнение (2) примет вид

$$Y'' = (\gamma^2 - \varepsilon_2 - f(Y^2))Y. \quad (5)$$

4. Условия сопряжения

Как известно, касательные составляющие электромагнитного поля непрерывны на границе раздела сред. В рассматриваемом случае касательными составляющими являются компоненты E_y и H_z . Отсюда получаем:

$$E_y(h+0) = E_y(h-0), \quad E_y(0+0) = E_y(0-0),$$

$$H_z(h+0) = H_z(h-0), \quad H_z(0+0) = H_z(0-0).$$

Можно показать, что в рассматриваемом случае величина $\frac{\partial E_y}{\partial x}$ также является непрерывной на границе раздела сред. Значит, справедливы условия

$$E'_y(h+0) = E'_y(h-0), \quad E'_y(0+0) = E'_y(0-0).$$

С учетом сказанного получаем условия сопряжения для функций Y и Y' :

$$[Y]_{x=0} = 0, \quad [Y]_{x=h} = 0, \quad [Y']_{x=0} = 0, \quad [Y']_{x=h} = 0, \quad (6)$$

где $[f]_{x=x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$.

Теперь условия непрерывности и дифференцируемости функции Y следуют из формул (3), (4) и (6).

Считаем, что функции $Y(x)$ и $Y'(x)$ удовлетворяют условию (это условие соответствует условию излучения на бесконечности)

$$Y(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right) \text{ и } Y'(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right) \text{ при } |x| \rightarrow \infty. \quad (7)$$

Введем обозначения для граничных значений функций $Y(x)$ и $Y'(x)$ в точках $x = 0 + 0$ и $x = h - 0$ (на границе слоя изнутри). Пусть

$$Y_0 := Y(0 + 0), Y_h := Y(h - 0), Y'_0 := Y'(0 + 0), Y'_h := Y'(h - 0). \quad (8)$$

Учитывая условия сопряжения (6) и обозначения (8), для постоянных A и B в решениях (3) и (4) мы получаем: $A = Y_0$, $B = Y_h$. Удобно переписать решения (3) и (4):

$$Y(x) = \begin{cases} Y_0 e^{x\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1}}, & x < 0; \\ Y_h e^{-(x-h)\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3}}, & x > h, \end{cases} \quad (9)$$

где Y_0 – начальное условие; Y_h определяется из условий сопряжения.

Замечание. Рассматриваемая нелинейная задача на собственные значения существенно зависит от начального условия (амплитуды падающего поля). Аналогичная линейная задача от амплитуды падающего поля не зависит. Это значит, что каждому собственному значению линейной задачи отвечает целый «пучок» волн с одним и тем же γ и всевозможными амплитудами. В рассматриваемой нелинейной задаче это уже не так, собственные значения зависят от амплитуды.

Из (9) мы получаем, что

$$Y'(x) = \begin{cases} \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1} Y_0 e^{x\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1}}, & x < 0; \\ -\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3} Y_h e^{-(x-h)\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3}}, & x > h. \end{cases} \quad (10)$$

С учетом последней формулы, условий сопряжения (6) и обозначений (8) получаем

$$\begin{aligned} Y'_0 &= \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1} Y_0, \\ Y'_h &= -\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3} Y_h. \end{aligned} \quad (11)$$

Теперь мы можем сформулировать краевую задачу на собственные значения (задачу P): необходимо найти собственные значения γ , для которых существуют нетривиальные функции $Y(x)$ такие, что при $x < 0$ и $x > h$ функции $Y(x)$ и $Y'(x)$ определяются выражениями (9), (10), где Y_0 – известная величина, а Y_h – неизвестная; при $0 < x < h$ функция Y удовлетворяет уравнению (5); функции Y и Y' удовлетворяют условиям сопряжения (6).

5. Описание «метода задачи Коши»

Предлагаемый ниже метод позволяет находить собственные значения рассматриваемой задачи с любой заданной точностью. Также предложенный метод позволит построить графики зависимости постоянной распространения (нормированной) γ от толщины слоя (нормированной) h . Дисперсионными кривыми в таких задачах традиционно называют кривые $\gamma = \gamma(\omega)$ (или $\gamma = \gamma(f)$), где $\omega = 2\pi f$ – круговая частота. Если же кривая $\gamma(\omega)$ зависит от амплитуды падающего поля (что как раз имеет место в рассматриваемой задаче), то такие кривые называют энергетическими дисперсионными кривыми. Поскольку мы работаем в нормированных переменных, то будем называть дисперсионной кривой (или энергетической дисперсионной кривой) график зависимости $\gamma = \gamma(h)$. Если известен график $\gamma(h)$, то из него можно получить график $\gamma(\omega)$, не пересчитывая заново собственные значения.

Пусть $h^* > h_* > 0$ и $\gamma^* > \gamma_* > \sqrt{\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3)}$ – некоторые числа. Будем считать, что

$$h \in [h_*, h^*] \text{ и } \gamma \in [\gamma_*, \gamma^*].$$

Разбиваем отрезки $[h_*, h^*]$ и $[\gamma_*, \gamma^*]$ на n и m частей соответственно.

Имеем сетку (h_i, γ_j) , $i = \overline{0, n}$, $j = \overline{0, m}$; причем $h_0 = h_* > 0$, $h_n = h^*$, $\gamma_0 = \gamma_* > \sqrt{\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3)}$, $\gamma_m = \gamma^*$. Тогда для каждой пары индексов (i, j) будем иметь пару начальных значений $(Y_{ij}(0), Y'_{ij}(0))$, где $Y_{ij}(0) \equiv Y_0$ и $Y'_{ij}(0) = \sqrt{\gamma_j^2 - \varepsilon_1} Y_0$. Как легко видеть из предыдущего значения, $Y_{ij}(0)$ и $Y'_{ij}(0)$ не зависят от h_i , но мы оставляем двойные индексы для удобства.

Теперь можно поставить задачу Коши для уравнения (5) с начальным условием $Y_{ij}(0)$, $Y'_{ij}(0)$. Величина γ является параметром в системе (5) и решения этой системы зависят от γ . Решив указанную задачу Коши, получаем значения $Y_{ij}(h) \equiv Y_j(h_i)$ и $Y'_{ij}(h) \equiv Y'_j(h_i)$. Поскольку Y непрерывна при $x = h$, то это позволяет вычислить $Y(h+0)$, а именно: $Y_{ij}(h+0) = Y_j(h_i)$. Теперь, используя вторую формулу (9) и найденное $Y_{ij}(h+0)$, мы можем вычислить $Y'_{ij}(h+0)$: $Y'_{ij}(h+0) = -\sqrt{\gamma_j^2 - \varepsilon_1} Y_{ij}(h+0)$. Но нам известно значение $Y'_{ij}(h-0)$ из решения задачи Коши. Принимая во внимание непрерывность $Y'(x)$ на границе $x = h$, построим функцию $F(h_i, \gamma_j) = Y'_{ij}(h+0) - Y'_{ij}(h-0)$. Можно показать (см. далее), что при определенных условиях функция $F(h_i, \gamma)$ является непрерывной функцией параметра γ . Пусть для заданного

h_i существуют такие γ_j и γ_{j+1} , что $F(h_i, \gamma_j)F(h_i, \gamma_{j+1}) < 0$. Это значит, что существует $\tilde{\gamma}_i \in (\gamma_j, \gamma_{j+1})$ такое, что $\tilde{\gamma}_i$ является собственным значением рассматриваемой задачи о распространении волн и этому собственному значению соответствует толщина слоя h_i . Значение $\tilde{\gamma}_i$, когда оно существует, может быть найдено с любой степенью точности, например, методом дихотомии.

6. Обоснование численного метода

Сформулируем некоторые теоретические результаты, которые будут необходимы при обосновании численного метода. В частности покажем, при каких условиях задача Коши для уравнения (6) с начальными условиями

$$Y(0) = Y_0, \quad Y'(0) = \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1} Y_0 \quad (12)$$

будет иметь единственное решение; покажем, что решение только что указанной задачи Коши непрерывно зависит от параметра γ .

Поскольку в полупространствах $x < 0$ и $x > h$ уравнение (6) является линейным и его решения известны, то мы сразу перейдем к выяснению единственности решения задачи Коши для уравнения (5). Перепишем уравнение (5) в виде нормальной системы. Пусть $Y_1 := Y$, $Y_2 := Y'$, тогда

$$\begin{cases} Y_1' = Y_2, \\ Y_2' = (\gamma^2 - \varepsilon_2 - f(Y_1^2))Y_1 \end{cases} \quad (13)$$

с начальными условиями

$$Y_1 = Y_0, \quad Y_2 = \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1} Y_0. \quad (14)$$

Пусть функции Y_1 и Y_2 удовлетворяют следующим неравенствам:

$$|Y_1 - Y_0| \leq b, \quad \left| Y_2 - \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1} Y_0 \right| \leq b, \quad (15)$$

где b – некоторая постоянная; и пусть существует такое число M , что справедливы неравенства

$$|Y_2| \leq M, \quad \left| (\gamma^2 - \varepsilon_2 - f(Y_1^2))Y_1 \right| \leq M. \quad (16)$$

Тогда, применяя теорему Пикара [14, с. 165] получаем следующее

Утверждение 1. Решение задачи Коши для системы (13) с начальными условиями (14) непрерывно дифференцируемо, единственное и существует при $x < b/M$, где постоянные b и M определяются формулами (15), (16).

Перейдем к доказательству непрерывной зависимости от параметра γ решений задачи Коши для системы (13) с начальными условиями (14).

В системе (13) сделаем замену переменной $\tilde{x} = x\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1}$. Тогда получаем

$$\begin{cases} Y_1' = \frac{Y_2}{\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1}}, \\ Y_2' = \left(\gamma^2 - \varepsilon_2 - f(Y_1^2) \right) \frac{Y_1}{\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1}} \end{cases} \quad (17)$$

и

$$Y_1(0) = Y_0, \quad Y_2(0) = Y_0, \quad (18)$$

причем $\tilde{x} \in [0, h\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1}]$.

Теперь мы имеем задачу Коши для системы (17) с начальными условиями (18). Легко видеть, что начальные условия (18) не зависят от параметра γ .

Пусть постоянная b определена, как выше, а постоянная M_γ такова, что для всех $\gamma \in (\gamma^*, \gamma^*)$ справедливы неравенства

$$|Y_2| \leq M_\gamma, \quad \left| \left(\gamma^2 - \varepsilon_2 - f(Y_1^2) \right) Y_1 \right| \leq M_\gamma. \quad (19)$$

Тогда, применяя теорему о непрерывной зависимости решения задачи Коши от параметра [14, с. 183], получаем следующее

Утверждение 2. Решение $Y_1(x, \gamma)$, $Y_2(x, \gamma)$ задачи Коши для системы (13) с начальными условиями (14) непрерывно дифференцируемо относительно x , единственно и существует при всех $x < b/M_\gamma$, непрерывно зависит от γ для всех $\gamma \in (\gamma^*, \gamma^*)$, где постоянные b и M_γ определены формулами (15) и (19) соответственно.

При выполнении условий утверждения 2 можно показать, что функция $F(h_i, \gamma)$, построенная в п. 5 является непрерывной функцией параметра γ .

7. Численные результаты

А. Керровская нелинейность

Рассмотрим случай керровской нелинейности. В данном случае диэлектрическая проницаемость внутри слоя имеет вид: $\varepsilon = \varepsilon_2 + \varepsilon_0 \alpha |\mathbf{E}|^2$, где ε_2 – постоянная составляющая диэлектрической проницаемости ε ; ε_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума.

Решения в полупространствах $x < 0$ и $x > h$ описываются формулами (9).

Внутри слоя $0 < x < h$ получаем уравнение

$$Y'' = (\gamma^2 - \varepsilon_2 - \alpha Y^2) Y. \quad (20)$$

Замечание. Решение уравнения (20) выражается через эллиптические функции [1, 15], и это позволяет провести исследование рассматриваемой задачи независимо [1], что очень важно для тестирования предложенного здесь вычислительного метода. Кроме того, керровская нелинейность может быть исследована с помощью МИДУ [6].

Все утверждения, полученные при описании случая произвольной нелинейности, справедливы и в рассматриваемом случае.

На рис. 1 приведены результаты расчетов дисперсионных кривых, полученных из работ [1, 6] и с помощью предложенного в данной работе метода.

Сплошные кривые обозначают результаты расчетов, полученных другими авторами, а точки получены с помощью предложенного в этой работе метода.

Для вычислений были использованы следующие параметры: $\varepsilon_1 = 4$, $\varepsilon_2 = 9$, $\varepsilon_3 = 4$, $Y_0 = 1$, $\gamma > 2$, $\alpha = 0$.

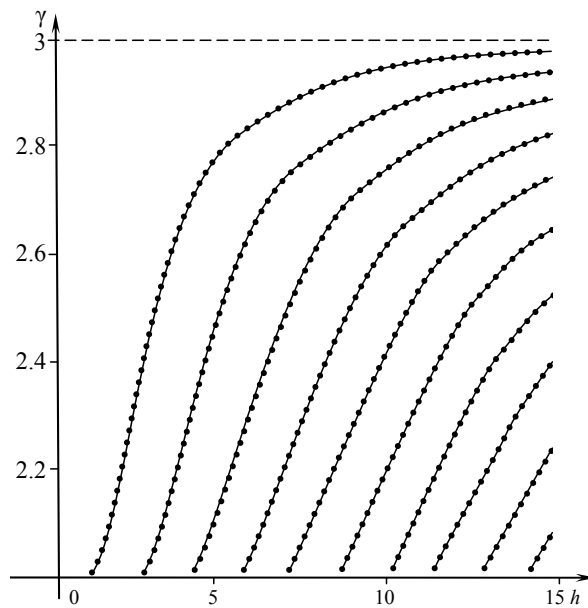


Рис. 1

На рис. 2 показана зависимость γ от h для ТЕ-волн, распространяющихся в слое с керровской нелинейностью при следующих значениях начальных параметров: $\varepsilon_1 = 1,1$, $\varepsilon_2 = 1,7$, $\varepsilon_3 = 1,1$, $\alpha = 0,02$, $Y_0 = 1$. Пунктиром, ниже основных линий, показаны решения дисперсионного уравнения для случая линейной среды в слое. Как видно, значение $\gamma^2 = 1,7$ является асимптотой для линейного слоя.

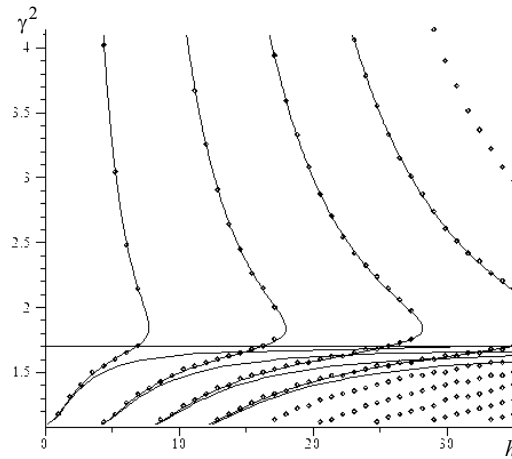


Рис. 2

На рис. 3 изображены дисперсионные кривые, отвечающие следующим параметрам: $\varepsilon_1 = 1,1$, $\varepsilon_2 = 1,7$, $\varepsilon_3 = 1,1$, $\alpha = -0,1$, $Y_0 = 1$. Из работы [1] известно, что при $\alpha < 0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = \varepsilon > 0$, $\varepsilon_2 > \varepsilon$ дисперсионные кривые терпят разрыв при $\gamma_1^2 = \varepsilon_2 - \sqrt{-\alpha(2(\varepsilon_2 - \varepsilon) + \alpha)}$. Это может указывать на изменение характера собственных функций, отвечающих собственным значениям, лежащим на различных частях дисперсионных кривых. При численных экспериментах в работе [1] для собственных значений $\gamma^2 > \gamma_1^2$ получались собственные функции с особенностями. Из численных экспериментов было установлено, что численный метод, используемый в этой работе для выбранных значений параметров, вычисляет собственные значения, только когда выполняется условие $1,1 < \gamma^2 < 1,368$. Легко подсчитать, что $\gamma_1^2 = \varepsilon_2 - \sqrt{-\alpha(2(\varepsilon_2 - \varepsilon) + \alpha)} \approx 1,3683$. Таким образом, полученные результаты согласуются с результатами, полученными в [1].

На рис. 4 представлены результаты расчетов для следующих значений параметров: $\varepsilon_1 = 1,1$, $\varepsilon_2 = -1,7$, $\varepsilon_3 = 1,1$, $\alpha = 5,7$, $Y_0 = 1$.

Б. Нелинейность с насыщением

Рассмотрим случай нелинейности с поглощением. В этом случае дисперсионные кривые могут быть построены с использованием МИДУ [2]. Это опять позволяет провести сравнение уже известных результатов с полученными при применении предложенного здесь численного метода. Но нужно отметить, что уже в этом случае при некоторых значениях параметров численный метод, полученный на основе МИДУ, встречает трудности при численной реализации. В рассматриваемом случае диэлектрическая проницаемость внутри слоя имеет вид

$$\varepsilon = \varepsilon_2 + \frac{\varepsilon_0 \alpha |E^2|}{1 + \beta |E^2|},$$

где ε_2 – постоянная составляющая диэлектрической проницаемости ε ; ε_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума.

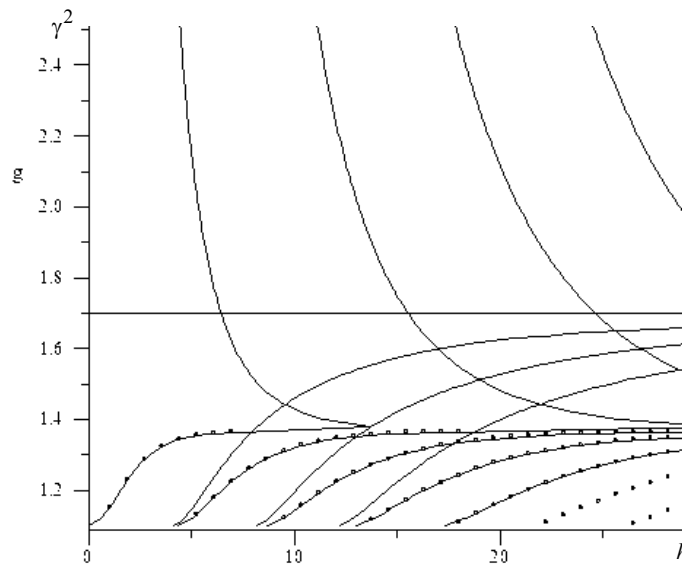


Рис. 3

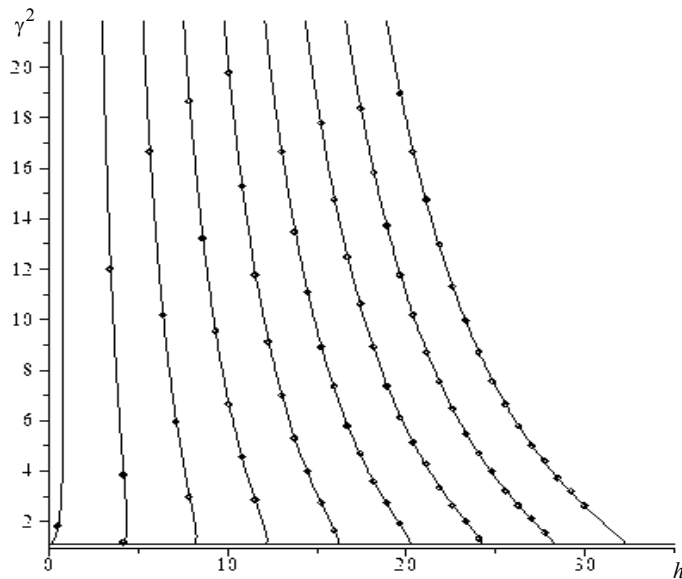


Рис. 4

Решения в полупространствах $x < 0$ и $x > h$ описываются формулами (9).
Внутри слоя $0 < x < h$ получаем уравнение

$$Y'' = \left(\gamma^2 - \varepsilon_2 - \frac{\alpha Y^2}{1 + \beta Y^2} \right) Y. \quad (21)$$

Замечание. Решение уравнения (21), хоть и сводится к квадратурам, однако его уже не удастся выразить в замкнутой форме.

Все утверждения, полученные при описании случая произвольной нелинейности, справедливы и в рассматриваемом случае.

В работе [2], в частности, получено неравенство

$$\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3) < \gamma^2 < \varepsilon_2 + \alpha\beta^{-1},$$

когда $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_3 > 0$, $\varepsilon_2 > \max(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Трудности при численной реализации МИДУ возникают, когда величина $\alpha\beta^{-1} \geq 10$, т.е. в случае, если α на порядок или более превосходит β . Как будет видно далее, использованный здесь метод не имеет подобного недостатка.

На рис. 5 приведены результаты расчетов дисперсионных кривых, полученных из работы [2] и с помощью предложенного в данной работе метода.

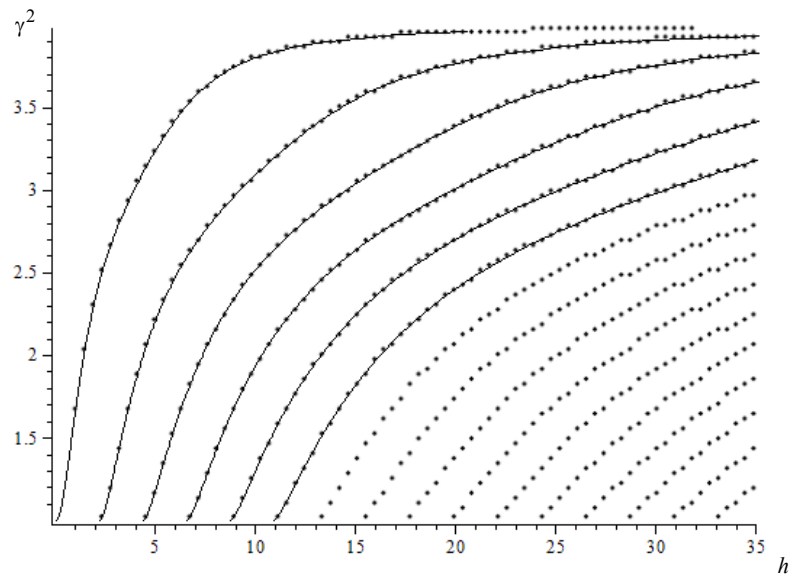


Рис. 5

На рис. 5–7 представлены дисперсионные кривые для нелинейного слоя при различных значениях коэффициентов нелинейности α и β . При расчетах взяты следующие значения параметров: $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 3$, $\varepsilon_3 = 1$, $Y_0 = 1$. На рис. 5 дисперсионные кривые отвечают следующим значениям коэффициентов нелинейности $\alpha = \beta = 0,1$; на рис. 6: $\alpha = \beta = 0,01$; на рис. 7: $\alpha = \beta = 0,001$. На рис. 5–7 проводится сравнение с результатами расчетов из [2].

На рис. 8 представлены результаты расчетов при $\alpha = 0,00001$; $\beta = 0,01$.

На рис. 9 расчеты выполнены при $\alpha = 0,01$; $\beta = 0,0001$. Также изображена кривая в случае керровской нелинейности при значениях коэффициента $\alpha = 0,01$.

Представленные графики демонстрируют хорошее согласие результатов, полученных предложенным методом с уже известными результатами.

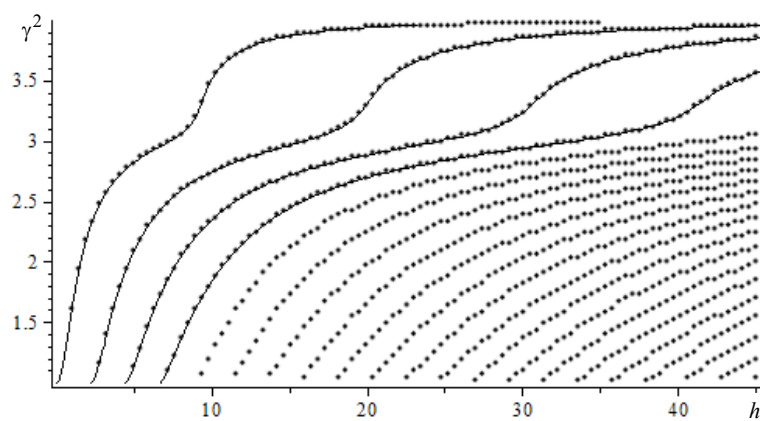


Рис. 6

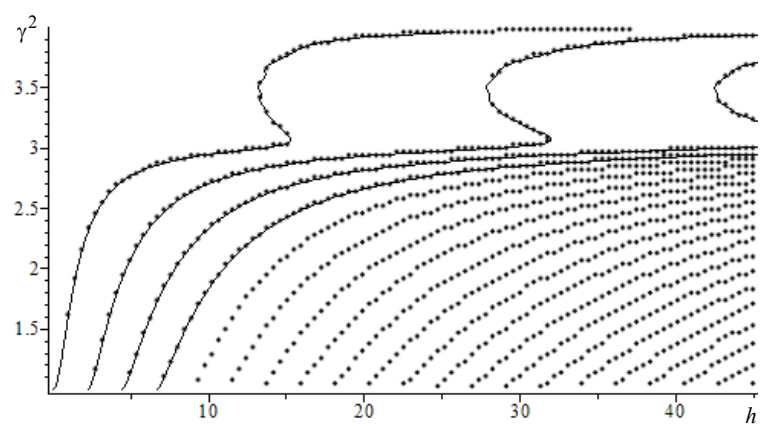


Рис. 7

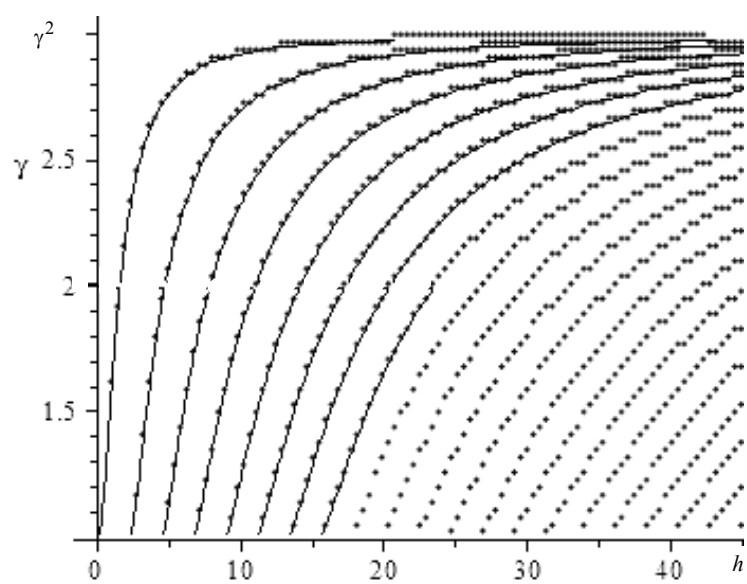


Рис. 8

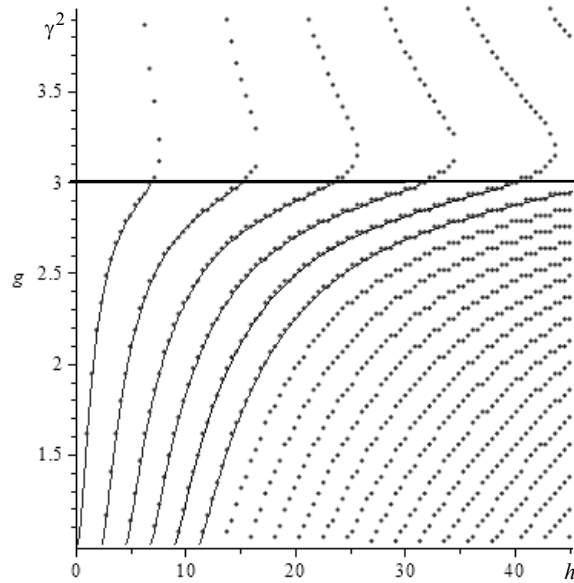


Рис. 9

Заключение

Отметим, что описанный в данной работе метод обладает важными достоинствами: метод прост в реализации (все известные математические пакеты могут решать задачу Коши); метод работает значительно быстрее, чем численный метод, основанный на реализации МИДУ или численный метод, предложенный в [7]; метод может быть применен для изучения широкого класса нелинейностей, в частности таких нелинейностей, для которых первый интеграл системы (5) не позволяет легко воспользоваться МИДУ.

Важно отметить, что предложенный метод эффективен в случае, если множество собственных значений рассматриваемой краевой задачи является дискретным, причем на собственных значениях полная производная по спектральному параметру от функции $F(h_i, \gamma)$ не равна нулю.

Еще отметим, что общий метод для нахождения изолированных собственных значений в нелинейной краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка вида $y'' = f(x, y, y', \gamma)$ был развит в работе [16]. Однако подчеркнем, что здесь мы предлагаем численный метод для конкретных задач электродинамики, объединенных общей постановкой, и, кроме того, предложенный здесь метод может быть развит для системы уравнений в нормальной форме (см., например, [17] для случая керровской нелинейности, для общей нелинейности метод будет развит в одной из следующих работ автора). Ясно, что далеко не всякую нормальную систему двух уравнений первого порядка можно свести к одному уравнению второго порядка вида $y'' = f(x, y, y', \gamma)$.

Список литературы

1. Валовик, Д. В. Распространение электромагнитных ТЕ-волн в слое из нелинейного метаматериала / Д. В. Валовик // Радиотехника и электроника. – 2011. – Т. 56, № 5. – С. 587–599.

2. **Валовик, Д. В.** Распространение электромагнитных ТЕ-волн в нелинейной среде с насыщением / Д. В. Валовик // Радиотехника и электроника. – 2011. – Т. 56, № 11. – С. 1329–1335.
3. **Валовик, Д. В.** О распространении ТМ-поляризованных электромагнитных волн в нелинейном слое с нелинейностью, выраженной законом Керра / Д. В. Валовик, Ю. Г. Смирнов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2008. – Т. 48, № 12. – С. 2186–2194.
4. **Валовик, Д. В.** Задача о распространении электромагнитных волн в слое с произвольной нелинейностью (I. ТЕ-волны) / Д. В. Валовик // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2010. – № 1 (13). – С. 18–27.
5. **Валовик, Д. В.** Задача о распространении электромагнитных ТМ-волн в слое с произвольной нелинейностью / Д. В. Валовик // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2011. – Т. 51, № 9. – С. 1729–1739.
6. **Smirnov, Yu. G.** Electromagnetic wave propagation in nonlinear layered waveguide structures / Yu. G. Smirnov, D. V. Valovik. – Penza : PSU Press, 2011. – 248 p.
7. **Зарембо, Е. В.** Об одном численном методе решения нелинейной краевой задачи на собственные значения для электромагнитных ТМ-волн, распространяющихся в слое с Керровской нелинейностью / Е. В. Зарембо // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2012. – № 1. – С. 75–82.
8. **Ахманов, С. А.** Проблемы нелинейной оптики / С. А. Ахманов, Р. В. Хохлов. – М. : ВИНТИ, 1964. – 296 с.
9. **Бломберген, Н.** Нелинейная оптика / Н. Бломберген. – М. : Мир, 1966.
10. **Eleonskii, P. N.** Cylindrical nonlinear waveguides / P. N. Eleonskii, L. G. Ogan'es'yants, V. P. Silin // Soviet Physics JETP. – 1972. – V. 35, № 1. – P. 44–47.
11. Nonlinear surface electromagnetic phenomena (Modern problems in condensed matter sciences, Vol. 29) / ed.: H.-E. Ponath, G. I. Stegeman. – Netherlands : Elsevier Science publishers, 1991.
12. **Es'kin, V. A.** Exact solutions for the source-excited cylindrical electromagnetic waves in a nonlinear nondispersive medium / V. A. Es'kin, A. V. Kudrin, E. Yu. Petrov // Physical Review E. – 2011. – V. 83. – P. 067602-1–067602-4.
13. **Hao Xiong.** Solutions of the cylindrical nonlinear Maxwell equations / Hao Xiong, Liu-Gang Si, Chunling Ding, Xin-You Lü, Xiaoxue Yang, Ying Wu // Physical Review E. – 2012. – V. 85. – P. 016602-1–016602-5.
14. **Еругин, Н. П.** Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений / Н. П. Еругин. – Минск : Наука и техника, 1979. – 744 с.
15. **Schürmann, H. W.** Solutions to the Helmholtz equation for TE-guided waves in a three-layer structure with Kerr-type nonlinearity / H. W. Schürmann, V. S. Serov, Yu. V. Shestopalov // J. Phys. A: Math. Gen. – 2002. – V. 35. – P. 10789–10801.
16. **Волков, Е. А.** Об исследовании и решении разностным методом нелинейных задач для обыкновенного дифференциального уравнения / Е. А. Волков // Труды МИАН СССР. – 1976. – Т. 140. – С. 103–129.
17. **Валовик, Д. В.** О методе задачи Коши решения нелинейной краевой задачи на собственные значения для электромагнитных ТМ-волн, распространяющихся в слое с Керровской нелинейностью / Д. В. Валовик, Е. В. Зарембо // Радиотехника и электроника. – 2012. – Т. 57 (принята к печати).

Зарембо Екатерина Викторовна

аспирант, Пензенский
государственный университет

E-mail: y_tak@yandex.ru

Zaremba Ekaterina Viktorovna

Postgraduate student,
Penza State University

УДК 517.927, 519.62, 517.958

Зарембо, Е. В.

Численный метод решения нелинейной краевой задачи на собственные значения для электромагнитных ТЕ-волн, распространяющихся в слое с произвольной нелинейностью / Е. В. Зарембо // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2012. – № 2 (22). – С. 59–74.